


Unidad 4:	Técnicas de comparación, predicción y azar.		
Semestre:	2	N° Clase	46
Habilidades:	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Resolver problemas utilizando estrategias como: <ul style="list-style-type: none"> ○ Descomponer el problema en subproblemas más sencillos. ○ Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático. ➤ Explicar soluciones propias y los procedimientos utilizados. 		
Objetivos:  2 hrs.	Resolver problemas desafiantes en grupos y de forma colaborativa, relacionados con probabilidad y conceptos alusivos a ella.		
Indicadores de evaluación	Aplican propiedades aditiva y multiplicativa de la probabilidad en diversos contextos.		

Inicio: (Preparando el nuevo aprendizaje) (10 minutos)

Esta clase se presenta como culminación de la cuarta unidad correspondiente al eje de Datos y azar. Es por esta razón que la propuesta apunta a un trabajo doble de PRM, distribuidos en los dos bloques de 45 minutos.

Por lo anterior, comience contextualizando a sus estudiantes sobre el trabajo que se realizará en esta sesión, destacando los elementos esenciales del trabajo en PRM:

1. Se espera un trabajo autónomo de los(as) estudiantes, tanto en la organización de trabajo, como en la lectura, comprensión y abordaje de los problemas.
2. Se espera un trabajo colaborativo de los(as) estudiantes, poniendo al servicio del grupo todas sus habilidades, en la búsqueda de la comprensión y resolución de los problemas por parte de cada uno(a) de los(as) integrantes del grupo.
3. Posterior al trabajo por grupo se realizará un plenario final en la que os grupos deberán exponer sus respuestas, soluciones e inquietudes.

Siendo fiel a lo anterior, esta clase ha sido dividida, posterior al inicio de la sesión, solo en 2 partes: **Problema 1** (PRM 1 y plenario 1) y **Problema 2** (PRM 2 y plenario 2)

PRM 1 (25 minutos)

Comience contextualizando a sus estudiantes sobre el trabajo que se realizará en esta sesión, destacando los elementos esenciales del trabajo en PRM:

1. Se espera un trabajo autónomo de los(as) estudiantes, tanto en la organización de trabajo, como en la lectura, comprensión y abordaje de los problemas.
2. Se espera un trabajo colaborativo de los(as) estudiantes, poniendo al servicio del grupo todas sus habilidades, en la búsqueda de la comprensión y resolución de los problemas por parte de cada uno(a) de los(as) integrantes del grupo.
3. Posterior al trabajo por grupo se realizará un plenario final en la que os grupos deberán exponer sus respuestas, soluciones e inquietudes.

Luego, proponga a sus estudiantes el siguiente problema:

Enunciado PRM:

Al comienzo de un partido de fútbol siempre se lanza una moneda al aire y se pide a los capitanes de los equipos que elijan cara o sello, para decidir cuál de los dos equipos comenzará chutando el balón. Esta forma de sortear se puede considerar justa, ya que la moneda tiene 50% de chance de salir cara y 50% de chance de salir sello.

Un árbitro se dispone a realizar el sorteo antes de comenzar un partido. Saca la moneda y al verla recuerda que la moneda que había guardado estaba cargada (un amigo matemático le había hecho ver que la probabilidad de obtener cara con esa moneda era el doble de la probabilidad de obtener sello). El partido no puede retrasarse más y el árbitro se encuentra en la mitad de la cancha, sin poder recurrir a alguien para conseguir otra moneda. ¿Cómo podría realizar el sorteo usando dicha moneda de manera que el sorteo sea justo para ambos capitanes?

Solución: Una forma de resolver este problema puede ser considerar dos lanzamientos en lugar de uno solo. Al efectuar este experimento se observa lo siguiente:

- (i) Los casos posibles son CC, CS, SC, SS.
- (ii) La probabilidad de obtener cara es el doble de obtener sello. Es decir, si llamamos $x = P(\text{sello})$, entonces $P(\text{cara}) = 2x$. Luego, $3x = 1$, por lo que $P(\text{sello}) = 1/3$ y $P(\text{cara}) = 2/3$.
- (iii) Luego, las probabilidades asociadas a este experimento son:

$$CC = 4/9$$

$$CS = 2/9$$

$$SC = 2/9$$

$$SS = 1/9$$

(iv) Vemos que, de los 4 casos posibles, hay dos que presentan la misma probabilidad, por lo que pedirles a los capitanes que elijan alguna de estas dos opciones (CS o SC) parece ser lo suficientemente justo, al menos en cuanto a probabilidad de éxito para cada uno.

(v) Luego, el árbitro puede realizar el siguiente sorteo:

- Pedir a los capitanes que elijan, cada uno, una de las opciones CS o SC.
- Lanzar dos veces la moneda al aire.
- Si sale alguno de estos casos, el sorteo termina, ya que alguno de los capitanes habrá ganado el sorteo.
- Si sale SS o CC, el árbitro deberá volver a realizar el experimento, lanzando nuevamente 2 monedas al aire.
- El paso anterior se repite tantas veces sea necesario hasta obtener CS o SC.

Plenario 1

(10 minutos)

Realice plenario final de la actividad, procurando tener en consideración los siguientes aspectos:

1. Tiempo para el plenario final (asegúrese de disponer al menos de 10 minutos para ello).
2. Preguntas indagadoras (indague en sus estudiantes no solo respuestas, sino también obstáculos que se presentaron, como por ejemplo problemas para comprender el enunciado, intentos previos a su respuesta definitiva que descartaron por alguna razón, cómo se generó la idea definitiva para abordar el problema).

3. De acuerdo a su monitoreo por los grupos, procure rescatar en el plenario final todas las distintas formas en las que los(as) estudiantes llegaron a una respuesta.
4. En caso de que los(as) estudiantes no hayan llegado a una respuesta, modere el plenario final rescatando las ideas de todos los grupos de manera que como curso puedan dar con una respuesta al problema.

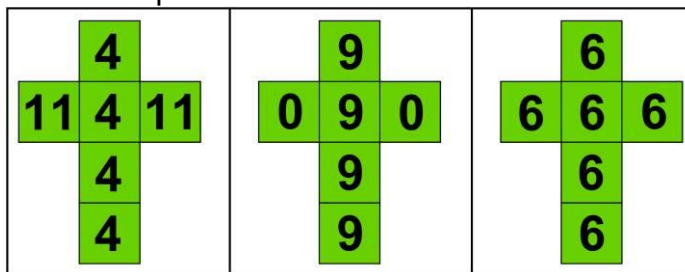
Algunas preguntas facilitadoras que pueden contribuir al trabajo de los(as) estudiantes:

1. ¿Qué se requiere para que el sorteo sea justo para ambos capitanes?
2. Si se lanza una vez la moneda, ¿cuáles son los posibles resultados? ¿Es posible asignar uno a cada capitán de manera que ambos tengan la misma probabilidad de ganar?
3. Al lanzar más veces el dado, ¿aumentan los posibles resultados? ¿Dentro de estos posibles resultados hay algún par de ellos que tengan la misma probabilidad de ocurrencia?
4. ¿Qué sucede si en el experimento sale un resultado distinto al que eligieron los capitanes? (en caso de que el grupo haya optado por lanzar más de una vez la moneda, asignando a cada capitán alguno de los posibles resultados que muestran igual probabilidad).

PRM 2

(25 minutos)

En la siguiente imagen se muestran las redes de 3 dados que aun cuando tienen la forma usual de cubo, sus caras no están numeradas del 1 al 6, como suele ser, sino que con los números que en las redes se aprecian:



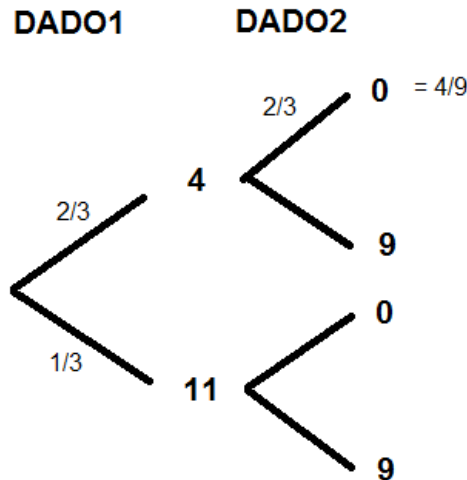
Con estos dados se realiza el siguiente juego entre dos personas:

- (i) Cada persona elige uno de los dados (cada uno elige uno diferente).
- (ii) Cada persona lanza el dado escogido.
- (iii) Gana la persona que obtuvo el número mayor

Si a usted le dan la oportunidad de elegir quien escoge primero el dado, ¿qué decidiría usted? cuál dado elegiría?

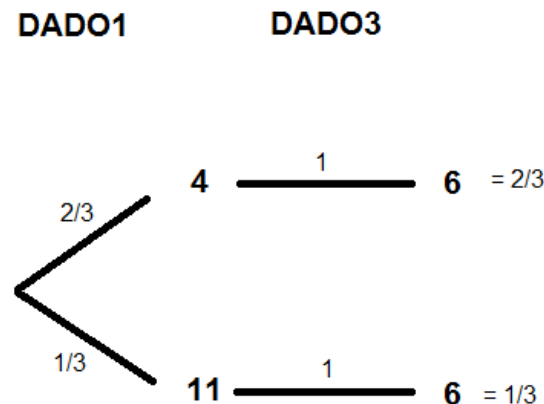
Solución:

- (i) Para responder a esta pregunta se deben analizar las probabilidades de ganar en cada posible combinación. Llamando de izquierda a derecha a los dados DADO1, DADO2 y DADO3, en este caso las combinaciones son: (1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1) y (3,2). Note que, por ejemplo, (1,2) y (2,1) no son la misma combinación, ya que en el primer caso yo elijo el DADO1 y la otra persona el DADO2, mientras que en el segundo caso yo elijo el DADO2 y la otra persona elige el DADO1.
- (ii) Análisis del DADO1 y el DADO2:



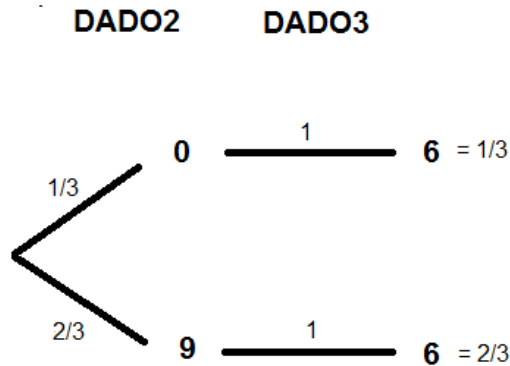
Aquí vemos que la única forma de perder es la rama calculada, por lo que la probabilidad de ganar con la combinación (1,2) es 5/9. Luego, la probabilidad de ganar con la combinación (2,1) es 4/9. En conclusión, y en términos de probabilidad, podemos decir que el DADO1 “le gana” al DADO2.

(iii) Análisis del DADO1 y el DADO3:



En este caso, si elegimos DADO1 ganamos con la combinación 11 – 6, pero perdemos con la combinación 4 – 6. Es decir, el DADO1 tiene más probabilidad de perder que de ganar contra el DADO3. En conclusión, y en términos de probabilidad, podemos decir que el DADO3 “le gana” al DADO1.

(iv) Análisis del DADO2 y el DADO3:



En este caso, si elegimos DADO2 ganamos con la combinación 9 – 6, pero perdemos con la combinación 0 – 6. Es decir, el DADO2 tiene más probabilidad de ganar que de perder contra el DADO3. En conclusión, y en términos de probabilidad, podemos decir que el DADO2 “le gana” al DADO3.

(v) Juntando los análisis anteriores, tenemos, en términos de probabilidad, las siguientes conclusiones:

- DADO1 gana a DADO2
- DADO2 gana a DADO3
- DADO3 gana a DADO1

Luego, no hay un dado que gane a todos, por lo que la elección depende de quien elija primero. Además, en cada combinación la probabilidad de ganar para el “dado ganador” es $\frac{2}{3}$. Es decir, conviene ceder la elección inicial al oponente, y una vez que éste haya hecho su elección elegir aquel dado que, en términos de probabilidad, le gana.

Plenario 2

(10 minutos)

Realice plenario final de la actividad, procurando tener en consideración los siguientes aspectos:

1. Tiempo para el plenario final (asegúrese de disponer al menos de 10 minutos para ello).
2. Preguntas indagadoras (indague en sus estudiantes no solo respuestas, sino también obstáculos que se presentaron, como por ejemplo problemas para comprender el enunciado, intentos previos a su respuesta definitiva que descartaron por alguna razón, cómo se generó la idea definitiva para abordar el problema).
3. De acuerdo a su monitoreo por los grupos, procure rescatar en el plenario final todas las distintas formas en las que los(as) estudiantes llegaron a una respuesta.
4. En caso de que los(as) estudiantes no hayan llegado a una respuesta, modere el plenario final rescatando las ideas de todos los grupos de manera que como curso puedan dar con una respuesta al problema.

Algunas preguntas facilitadoras que pueden contribuir al trabajo de los(as) estudiantes:

1. Si elijes el primer dado, ¿cuál es la probabilidad de ganar al jugar contra cada uno de los otros dados?
2. Si elijes el primer dado, ¿contra cuál de los otros dos dados te conviene más jugar?
3. Repita las preguntas anteriores para los dados 2 y 3.
4. ¿Quién maneja las probabilidades de ganar, quien elige primero o quien elige después?